CHAPITRE III. Systèmes linéaires libres amortis à un degré de liberté.

3.1 Force d'amortissement

Un système soumis à un frottement est dit amorti. Le frottement le plus simple est le frottement **visqueux**. Les frottements visqueux sont de la forme

$$\boxed{f = -\alpha v.} \tag{3.1}$$

α est une constante positive appelée **coefficient de frottement** et v est la vitesse du corps en mouvement. En mécanique, l'amortisseur est schématisé par: α : La vitesse v est dans ce cas la vitesse relative des deux bras de l'amortisseur.

3.2 Équation de Lagrange des systèmes amortis

S'il existe un frottement $f = -\alpha\dot{q}$, l'équation de Lagrange devient: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} = -\alpha\dot{q}$.

En introduisant la fonction de **dissipation** $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha\,\dot{q}^2$, nous pouvons écrire: $f = -\alpha\dot{q} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{q}}$.

(En translation $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha\,\dot{x}^2$. En rotation $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha(l\dot{\theta})^2$. En électricité $\mathcal{D} = \frac{1}{2}Ri^2 = \frac{1}{2}R\,\dot{q}^2$.)

L'équation de Lagrange des systèmes amortis s'écrit alors (où $q = x,\, y,\, z,\, q,\, \theta\ldots$)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{q}}.} \tag{3.2}$$

3.3 Équation du mouvement des systèmes amortis

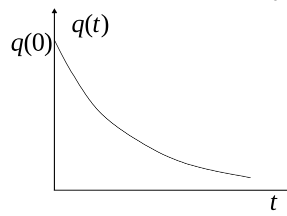
L'équation du mouvement des systèmes linéaires amortis par $f = -\alpha\dot{q}$ est de la forme

$$\boxed{\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0.} \tag{3.3}$$

λ est appelé **facteur (ou coefficient, ou constante) d'amortissement.** ω_0 est la **pulsation propre**. $\frac{\omega_0}{2\lambda} = Q$ est appelé **facteur de qualité.** (Parfois, l'équation 3.3 est écrite sous la forme $\ddot{q} + \gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$.)

3.4 Résolution de l'équation du mouvement

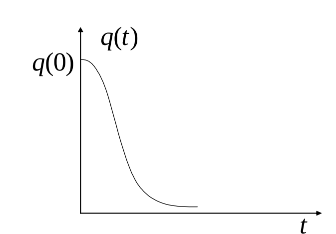
La solution de l'équation (3.3) est de la forme $q(t) = Ae^{rt}$. En injectant ceci dans (3.3) on obtient $r^2Ae^{rt} + 2\lambda rAe^{rt} + \omega_0^2Ae^{rt} = 0 \Rightarrow r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$ appelée **l'équation caractéristique.** On distingue alors trois cas suivant le signe du discriminant réduit $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$.



- $\lambda^2 - \omega_0^2 > 0$: (amortissement important: $Q < 0,5$)
  Deux solutions réelles pour l'équation caractéristique:
  $r_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$. $\quad r_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$.
  Le mouvement résultant est $q(t) = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t}$, soit:

$$\boxed{q(t) = e^{-\lambda t}\left(A_1e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}t} + A_2e^{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}t}\right).} \tag{3.4}$$

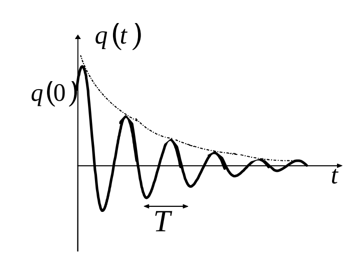
Le mouvement est dit **apériodique**.



- $\lambda^2 - \omega_0^2 = 0$: (amortissement critique: $Q = 0,5$)
  Une solution double pour l'équation caractéristique :
  $r_1 = r_2 = r = -\lambda$.
  Le mouvement résultant est $q(t) = (A_1 + A_2t)\,e^{rt}$, soit:

$$\boxed{q(t) = e^{-\lambda t}(A_1 + A_2t)\,.} \tag{3.5}$$

Le mouvement est dit en régime **critique**.



- $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$: (amortissement faible: $Q > 0,5$)
  Deux solutions complexes pour l'équation caractéristique:
  $r_1 = -\lambda - j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. $\quad r_2 = -\lambda + j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$.
  Le mouvement résultant est $q(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$, soit:

$$\boxed{q(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \phi)\,.} \tag{3.6}$$

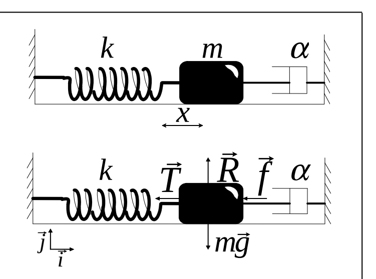
Le mouvement est dit **pseudo-périodique**. $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ est appelée **pseudo-pulsation**. $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$ est appelée **pseudo-période**.

3.5 Décrément logarithmique

Pour évaluer la diminution exponentielle de l'amplitude du mouvement pseudo-périodique, nous utilisons le logarithme. Le rapport $\delta = \ln \frac{q(t)}{q(t+T)}$ (ou encore $\frac{1}{n} \ln \frac{q(t)}{q(t+nT)}$): est appelé le **décrément logarithmique.** En utilisant (3.6), on trouve $\delta = \ln \frac{Ae^{-\lambda t}}{Ae^{-\lambda(t+T)}} \Longrightarrow \boxed{\delta = \lambda T.}$ (3.7)

3.6 Exemples

a) Soit le système masse-ressort ci-contre. Trouver l'équation du mouvement d'abord avec le Lagrangien puis avec le PFD.



Solution: • *À l'aide du Lagrangien :*

Le Lagrangien est $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$.

$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha\,\dot{x}^2$. L'équation de Lagrange s'écrit alors

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} \Rightarrow m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$

- *À l'aide du PFD :* $\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} \Rightarrow \overrightarrow{T} + m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{f} = m\overrightarrow{a} \Rightarrow -kx\overrightarrow{i} - mg\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{j} - \alpha\dot{x}\overrightarrow{i} = m\ddot{x}\overrightarrow{i}$

  Par projection sur $x'Ox$: $-kx - \alpha\dot{x} = m\ddot{x} \Longrightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$

b) Soit le système disque-ressort ci-contre. $\theta \ll 1$. Trouver l'équation du mouvement à l'aide du Lagrangien puis à l'aide du TMC. Trouver la nature du mouvement si M=**1**kg, k=**2**N/m, R=**10**cm, r=**5**cm, α=**8**Ns/m.

- *À l'aide du Lagrangien :*

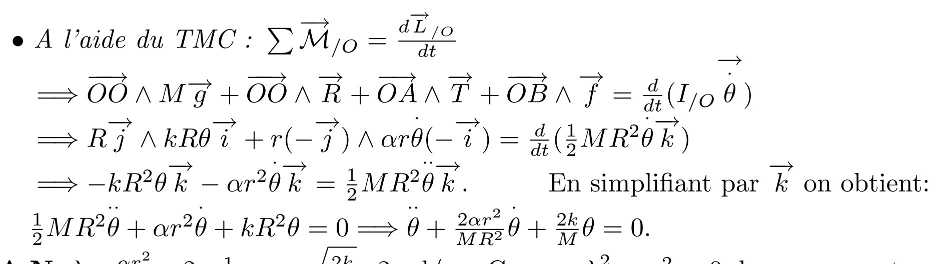
$\mathcal{L} = T - U. \quad T = \frac{1}{2}I_{/O}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2. \quad U = \frac{1}{2}k(R\theta)^2$.

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)\,\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kR^2\theta^2. \qquad \mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha v_B^2 = \frac{1}{2}\alpha(r\dot{\theta})^2.$

L'équation de Lagrange nous donne alors l'équation du mouvement:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} \Longrightarrow \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} + kR^2\theta = -\alpha r^2\dot{\theta} \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{2\alpha r^2}{MR^2}\dot{\theta} + \frac{2k}{M}\theta = 0.$

- *A l'aide du TMC :* $\sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O} = \frac{d\overrightarrow{L}_{/O}}{dt}$

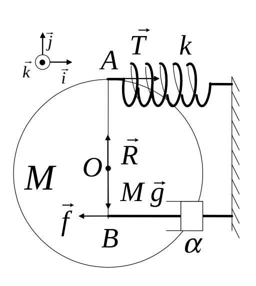


$\Longrightarrow \overrightarrow{OO} \wedge M\overrightarrow{g} + \overrightarrow{OO} \wedge \overrightarrow{R} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{T} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{f} = \frac{d}{dt}(I_{/O}\,\overrightarrow{\dot{\theta}})$

$\Longrightarrow R\overrightarrow{j} \wedge kR\theta\overrightarrow{i} + r(-\overrightarrow{j}) \wedge \alpha r\dot{\theta}(-\overrightarrow{i}) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}\overrightarrow{k})$

$\Longrightarrow -kR^2\theta\overrightarrow{k} - \alpha r^2\dot{\theta}\overrightarrow{k} = \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta}\overrightarrow{k}.$ En simplifiant par $\overrightarrow{k}$ on obtient:

$\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} + \alpha r^2\dot{\theta} + kR^2\theta = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{2\alpha r^2}{MR^2}\dot{\theta} + \frac{2k}{M}\theta = 0.$



A.N: $\lambda = \frac{\alpha r^2}{MR^2} = 2\text{s}^{-1}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M}} = 2$rad/s. Comme $\lambda^2 - \omega_0^2 = 0$, le mouvement est en régime critique.